



University of the Pacific  
**Scholarly Commons**

---

Euler Archive - All Works

Euler Archive

---

1747

# Solutio problematis cuiusdam a Celeberrimo Daniele Bernoullio propositi

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

---

## Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Solutio problematis cuiusdam a Celeberrimo Daniele Bernoullio propositi" (1747). *Euler Archive - All Works*. 99.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/99>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

## SOLVTIO PROBLEMATIS

CVIVSDAM

A CELEB. DAN. BERNOVLLIO

PROPOSITE

A. L. Euler.

§. 1.

**I**n postremis litteris, quas Cel. Daniel Bernoulli ad me dedit Basilea d. 24 Maii huius anni, mentionem fecit alicuius problematis, in quod occasione alicuius Problematis mechanici incidisset. Quaerebat autem inter omnes curvas isoperimetricas iisdem terminis contentas eam, in qua  $\int r^m ds$  haberet maximum minimumue valorem; denotantibus  $s$  arcum curvae,  $r$  vero eius radium osculi. Nunciat vero Vir Celeb. simul, se duplicem solutionem esse nactum, ad quarum alteram ponendo elementum arcus  $ds$ , ad alteram autem ponendo elementum abscissae  $dx$  constans peruenisset: at ambas hasce solutiones ita esse comparatas, ut inter se non conspirare videantur. Casu quidem quo  $m=1$  hanc mihi perscripsit aequationem a se inuentam,  $ds = \frac{2rdr}{\sqrt{(g+4nr-4rr)}}$  qua curvae natura exprimatur. Sin autem inter omnes omnino curvas quaereretur ea, in qua esset  $\int r ds$  minimum, se inuenisse scribit, fore  $n=0$ , cum tamen ego iam ante Ipsi scripsissem cycloidem huic quaestioni satisfacere eamque solam. Hanc ob rem me rogauit, ut problema hoc pariter aggrederer, solutionemque quam fiero consecutus, secum communicarem.

§. 2. Ac primo quidem intuitu istud problema in amplissimo problemate isoperimetrico, cuius plures solutiones

tiones a Viris acutissimis Bernoulliis, Hermanno ac Tayloro sunt traditae, contineri videtur: Sed qui ipsam huius problematis solutionem aggredietur, ex methodis istis, quas nominati Viri reliquerunt, vix quicquam utilitatis assequetur; cuius rei ratio est, quod in formula  $\int r^m ds$ , quae minima esse debet, differentialia secundi gradus insint, ob radium osculi  $r$ ; memoratae vero methodi ad alias formulas non sint accommodatae, nisi quae ex differentialibus primi gradus respectu coordinatarum orthogonalium consistant; omnem enim formulam, quae maxima minime esse debet, ante ad huiusmodi coordinatas orthogonales reduci oportet, quam resolutio suscipiatur. Mihi vero solutio huius problematis statim non difficilis est visa, cum ante biennium circiter novam atque peculiarem methodum essem adeptus, omnia huius generis problemata resoluendi, quae ad differentialia primi generis non erat adstricta, sed ad cuiuscunque gradus differentialia patebat. Quam methodum meam etiam si iam protulerim, tamen non incongruum visum est, eam ad problema hoc a Celeb. Bernoullio propositum accommodare, eiusque beneficio solutionem desideratam emere, cum ut Viri Clarissimi desiderio satisfacerem, tum etiam, ut methodi meae vis et praestantia evidentius perspiciatur.

§. 3. Problema autem propositum in duas partes distribui conveniet, in quarum priore inter omnes omnino curvas iisdem terminis contentas eam inuestigabo, in qua  $\int r^m ds$  minimum omnium obtineat valorem: quae quaestio, etiam si a Celeb. Bernoullio non videatur esse proposita, tamen praecipue hic tractari meretur. Nam quae curva inter omnes prorsus curvas iisdem terminis contentas

# 166 SOLVTIO PROBLEMATIS CVIVSDAM

desiderata maximi minimiue proprietate gaudet, eadem etiam hac praedita erit proprietate inter omnes curuas aequelongas. In altera autem problematis parte infinitas curuas intra eosdem terminos sitas contemplantur, quae omnes inter se longitudine sint aequales, atque ex his solum curuis eam determinabo, in qua  $\int r^m ds$  minimum valorem sit habiturum, quae quidem quaestio cum proposita penitus congruit. In priore igitur problemate inter datos terminos absolute ea curua inuestigatur, in qua sit  $\int r^m ds$  minimum, in posteriore vero inter eosdem terminos curua datae longitudinis desideratur, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis et iisdem terminis contentas hac gaudeat praerogatiua, ut  $\int r^m ds$  minimam obtineat quantitatem. Ex quo perspicuum est priori quaestioni vnicam satisfacere posse curuam, posteriori vero innumerabiles, pro infinita longitudinis varietatae, quae curuae quaesitae praescribi potest.

§. 4. Fundamentum, quo vtriusque problematis solutio nititur, ex methodo mea iam exposita huc redit: Si positis abscissa  $=x$ ; applicata  $=y$ , inter omnes curuas iisdem terminis comprehensas ea requiratur, in qua formula quaecunque integralis maximum minimumue induere debeat valorem; tum, cuiuscunque gradus differentia- lia in ea formula integrali insint, dummodo integralia non implicantur, ponatur  $dy=pdx$ ;  $dp=qdx$ ;  $dq=r dx$ ;  $dr=s dx$ ; etc. Quo facto formula illa integralis ad eiusmodi formam reducetur  $\int Z dx$ , in qua  $Z$  erit functio quantitatum  $x$ ;  $y$ ;  $p$ ;  $q$ ;  $r$ ;  $s$  etc. Deinde quantitas  $Z$  differentietur; sitque  $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+Sds+$  etc. Hinc formetur valor quidam  $V$  fumendo  $V=N-\frac{dP}{dx}+\frac{dQ}{dx^2}-\frac{d^2R}{dx^3}+\frac{d^2S}{dx^4}$ -etc. posito  $dx$  constante. Hoc denique pacto pro formula

formula integrali proposita inuento eiusmodi valore  $V$  ponatur  $V=0$  haecque aequatio praebebit naturam curvae quaesitae. At si non inter omnes omnino curuas, sed inter eas tantum, in quibus una pluresue formulae integrales aequalem obtinent valorem ea desideretur, in qua alia quaecumque formula integralis maximum minimumue habitura sit valorem, tum singulae formulae integrales praescripto modo tractentur, atque uniuscuiusque valor respondens  $V$  eruatur, hocque facto singuli isti valores  $V$  per quantitates constantes quas-cunque multiplicati coniungantur, nihiloque aequales ponantur: ex qua aequatione natura curvae quaesitae elicietur.

§. 5. His praemissis quaestionem priorem, quam ex problemate proposito formavi aggredior, atque inter omnes curuas iisdem terminis contentas eam definiam, in qua fit  $\int r^m ds$  minimum. In hanc finem sumpta recta quacunque pro axe, sit abscissa  $=x$ , et applicata  $=y$ ; erit  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , atque posito  $dx$  constante habebitur  $r = \frac{ds}{dx}$ . Cum autem fieri debeat  $dy = p dx$ ; et  $dp = q dx$ ; erit  $ds = dx \sqrt{1 + pp}$  et  $ddy = q dx^2$ , unde prodit  $r =$

$\frac{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$ , ac formula integralis, quae minima esse debet,

fiet  $= \int \frac{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}} dx}{q^m}$ . Habebitur ergo  $Z = \frac{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$

hincque porro  $dZ = \frac{(3m+1)(1 + pp)^{\frac{3m-1}{2}} p dp}{q^m}$

$\frac{m(1 + pp)^{\frac{3m-1}{2}} dq}{q^{m+1}}$ , quae expressio cum superiore vniuersali com-

parata

168 SOLUTIO PROBLEMATIS CVIVSDAM

parata dat  $M=0$ ;  $N=0$ ;  $P=\frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^m}p$ ;  $Q=$

$\frac{-m(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^{m+1}}$ ;  $R=0$ ;  $S=0$ ; etc. Quocirca habebitur  $V=$

$\frac{-dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$ ; atque pro curua quaesita prodibit ista aequa-

tio:  $0=\frac{-dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$ ; quae integrata dat  $A dx = -P dx + dQ$ .

§. 6. Antequam autem loco  $P$  et  $Q$  debitos valores substituam, secundam integrationem perficere tentabo, in subsidium vocando aequationes  $dp=qdx$  et  $dZ=Pdp+Qdq$ . Substituto vero  $\frac{dp}{q}$  loco  $dx$ , aequatio inuenta transiit in hanc.  $Adp=-Pdp+qdQ$ , haecque denuo ob  $Pdp=dZ-Qdq$  in istam:  $Adp=-dZ+Qdq+qdQ$  cuius integralis est  $Ap+B=-Z+Qq$ . Nunc tandem substitutionibus utar, obti-

neboque propter  $Z=\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$  et  $Qq=\frac{-m(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^m}$

mutatis signis constantium  $A$  et  $B$  hanc aequationem

$Ap+B=\frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$  quae ducta in  $dx$  ob  $y=$

$\int p dx$  et integrata suppeditabit istam aequationem  $Ay+Bx$

$=(m+1)\int \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m} dx = (m+1)\int r^m ds$ , ex qua per-

spicitur eam curuam esse habituram  $\int r^m ds$  minimum, in-

qua fit  $\int r^m ds=Ay+Bx$ . Quoniam autem axe utcumque

mutato  $r$  et  $s$  non mutantur, ita axis accipiat ut  $Ay+Bx$

abeat vel in solam abscissam vel solam applicatam: quod cum fieri liceat sine ulla restrictione vel  $A$  vel  $B$

poni

poni poterit  $= 0$ . Quamobrem pro curua quaesita habebitur vel ista aequatio  $Ax = (m+1) \int r^m ds$  vel  $Ay = (m+1) \int r^m ds$ .

§. 7. Quo homogeneitas quantitatum obseruetur ponam  $A = a^m$ , atque ista utar aequatione  $a^m x = (m+1) \int r^m ds$ , ex qua penitus in curuae naturam inquiram. Optime autem curuae satisfaciens indoles cognoscetur ex aequatione inter duas variables tantum, cuiusmodi aequationem duplici modo exhiberi licet, altero inter variables  $r$  et  $s$ , per quam aequationem natura ipsius curuae sine ullo ad quempiam axem respectu habito designatur; altero modo autem inter variables  $x$  et  $y$  aequatio indicabitur quae tum ad curuae constructionem tum ad cognitionem qualis sit, est maxime accommodata. Priore modo aequatio inter  $r$  et  $s$  reperietur, dum  $x$  ex aequatione  $a^m x = (m+1) \int r^m ds$  vel ex eius differentiali  $a^m dx = (m+1) r^m ds$  eliminabitur; id quod hoc modo praestabitur: cum  $\frac{dx}{ds}$  posito sinu toto  $= 1$  sit sinus arcus, cuius differentiale est  $\frac{ds}{r}$ , erit  $\frac{dx}{ds} = \sin. \text{arcus} \int \frac{ds}{r}$ , quo valore substituto ista habebitur aequatio  $a^m \sin. \text{arcus} \int \frac{ds}{r} = (m+1) r^m$  ac loco  $\frac{a^m}{m+1}$  scripto  $c^m$ , erit  $\int \frac{ds}{r} = \text{arctui cuius sinus est } \frac{r^m}{c^m} =$

$\int \frac{mr^{m-1} dr}{V(c^{2m} - r^{2m})}$ . Sumtis ergo differentialibus erit  $ds =$

$\frac{mr^m dr}{V(c^{2m} - r^{2m})}$  atque capiendo integralia habebitur pro curua

quaesita ista aequatio  $s = m \int \frac{r^m dr}{V(c^{2m} - r^{2m})}$  qua arcus ex dato radio osculi determinatur.

Tom. X.

Y

§. 8.

170 SOLVITIO PROBLEMATIS CVIVSDAM

§. 8. Ad aequationem autem inter coordinatas orthogonales  $x$  et  $y$  eliciendam adhibeo aequationem supra inuentam, in qua etiamnum  $p$  et  $q$  continentur, quae huc redit

$$A^m q^m = (1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}}. \text{ Haec autem porro reducitur ad hanc}$$

$Aq = (1 + pp)^{\frac{3m+1}{2m}}$ , quarum quidem vtraque ad curuam construendam sufficere posset, cum duae tantum infint variabiles  $p$  et  $q$ . Quia autem est  $qdx = dp$ , habebitur

$$A dp = (1 + pp)^{\frac{3m+1}{2m}} dx \text{ feu } dx = \frac{adp}{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}. \text{ Deinde ob}$$

$$dy = p dx, \text{ erit } dy = \frac{ap dp}{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2m}}} \text{ vnde integrando obtine-}$$

$$\text{tur } y = \frac{-ma}{(m+1)(1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}} + b; \text{ hincque } \frac{ma}{(m+1)(b-y)} =$$

$(1 + pp)^{\frac{m+1}{2m}}$ . Fiat  $\frac{ma}{m+1} = -c$ , et ponatur  $b = 0$ , quia hoc pacto amplitudo aequationis nihil restringitur, habebiturque

$$\frac{c}{y} = (1 + pp)^{\frac{m+1}{2m}}, \text{ atque } 1 + pp = \frac{c^{\frac{2m}{m+1}}}{y^{\frac{2m}{m+1}}}; \text{ ex quo fit } p =$$

$$\frac{\sqrt[m]{c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}}}}{y^{\frac{m}{m+1}}}. \text{ Cum nunc fit } dx = \frac{dy}{p} \text{ orietur aequatio}$$

pro curua quaesita inter coordinatas  $x$  et  $y$  ista  $x =$

$$\int \frac{y^{\frac{m}{m+1}} dy}{\sqrt[m]{c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}}}} \text{ atque in ea erit } \int r^m ds = \frac{(m+1)^m}{m^m} c^m x.$$

Cur-



Curva igitur quaesita erit algebraica, quoties fuerit vel  $m = \frac{1}{2i}$  vel  $m = \frac{-1}{2i+1}$ , denotante  $i$  numerum integrum affirmativum quemcunque.

§. 9. Casus hic nonnulli particulares seorsum considerari merentur, quorum primus esto si  $m = -1$ , seu quo curva desideratur, in qua  $\int \frac{ds}{r}$  sit maximum minimumue. Hoc autem casu ob  $m+1=0$  in omnibus aequationibus inuentis accidit incommodum, ut iudicium difficile videatur. At attentius rem consideranti patebit, hunc casum ne quidem ad quaestionem de maximis et minimis pertinere, cum  $\frac{ds}{r}$  integrationem admittat, existente  $\int \frac{ds}{r}$  arcu circuli cuius sinus est  $\frac{dx}{ds}$ ; adeo ut  $\int \frac{ds}{r}$  non ad totam curvam pertineat, sed ex positione extremi curvae elementi respectu axis assumti pendeat. Alter casus est quo  $m=0$ , seu quo curva quaesita minima esse debet inter suos terminos.

Hic facillime cognoscetur ex aequatione  $A^m q^m = (1+pp)^{\frac{m+1}{2}}$  quae posito  $m=0$  praebet  $p = \text{const.}$  unde intelligitur huic casui lineam rectam satisfacere. Denique attendamus ad casum  $m=1$ , quo curva quaeritur, quae inter omnes alias habeat  $\int r ds$  minimum. Pro hac autem curva reperitur ista aequatio  $x = \int \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{c-y}} = \int \frac{y dy}{\sqrt{cy-yy}}$ , ex qua manifestum est curvam satisfaciendam esse cycloidem, cuius cuspis in altero termino dato collocatur; et basis in ipsum axem incidit. Fiet autem  $\int r ds = 2cx$ ; unde intelligitur quaestioni maxime satisfieri, si eiusmodi cyclois eligatur, cuius binae cuspides in ambos terminos praescriptos incident.

§. 10. Atque haecenus quidem minimi valoris tantum mentio est facta, qui expressioni  $\int r^m ds$  sit concilian-

dus, cum tamen methodus adhibita etiam maximum, si  
 quod habetur, indicet. Si enim  $m$ , uti feci, tanquam  
 numerus affirmatiuus consideretur,  $\int r^m ds$  maximum habe-  
 bit valorem, si sit  $r = \infty$ , lineaque quaesita recta, qui  
 casus maximi cum sponte innotescat illo inueniendo super  
 sedendum censui, etiamsi is quoque ex aequatione inuenta

$$Ap + B = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m} \quad \text{fluat, faciendo } A \text{ et } B \text{ infi-}$$

nite magna, quo casu fit  $p = \text{constanti}$ . Contra vero ac-  
 cidit, si  $m$  fuerit numerus nihilo minor, huicque quae-  
 stioni recta semper ita satisfacit, ut sit  $\int r^m ds$  minimum,  
 quippe  $= 0$ ; curuae igitur, quas pro his casibus aequa-  
 tiones inuentae suppeditant ita sunt comparatae, ut in iis  
 sit  $\int r^m ds$  maximum. Ita si ponatur  $m = -2$  curua re-  
 perietur quae inter omnes iisdem terminis contentas sit  
 habitura  $\int \frac{ds}{r^2}$  maximum non minimum. Curua autem ista  
 hac continebitur aequatione  $x = \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{c^2 - y^4}}$ , ex qua intelligitur  
 curuam satisfaciendam esse elasticam ad axem orthogonalem,  
 seu cuius tangentes in punctis flexus contrarii sint inter  
 se parallelae, atque normales ad axem, in quo abscissae  
 $x$  capiuntur. Erit autem  $\int \frac{ds}{r^2} = \frac{x^2}{c^2}$ .

§. II. In his autem lineis curuis, quae problemati  
 satisfacere sunt inuentae, paradoxon euenit, quod in aliis  
 huius generis problematis vsu venire non solet. Cum enim  
 axis, in quo abscissae capiuntur, respectu duorum praescri-  
 ptorum terminorum, per quos curua transire debet, po-  
 sitione aliter non determinetur, nisi quod per alterum ter-  
 minum transire debeat; infinitis modis parameter curuae  
 accipi poterit, ita ut curua per alterum terminum trans-  
 eat,

eat, id quod fiet axi debitam positionem tribuendo. Quamobrem solutio inuenta innumerabiles continet curuas problemati satisfaciētes, cum tamen vnica satisfacere videatur; namque vel in his omnibus curuis  $\int r^m ds$  eundem valorem obtinet, quod tamen non accidit, vel secus, quo casu ea, in qua  $\int r^m ds$  erit vel maximum vel minimum problemati sola satisfacere censenda est. Ita casu  $m=1$ , pro quo cyclois est inuenta, cuius cuspis in altero termino sit positus, parameter cycloidis seu magnitudo circuli generatoris non definitur, quaecunque enim cyclois assumatur, ea ita poterit constitui, vt quoque per alterum terminum transeat. At facile colligire licet, ex quo minore circulo cyclois generetur, eo minorem quoque fore  $\int r ds$ ; ita vt huic quaestioni stricte acceptae ea cyclois maxime satisfaciāt, quae a circulo minimo seu infinite paruo sit nata; cuiusmodi curua, etsi a recta differre non videatur tamen maxime discrepat; eo quod longitudine est diuersa, atque vbique radium osculi habet infinite paruum.

§. 12. Cum igitur solutio huius problematis, prout id quidem est propositum, innumeras praebeat curuas, concludendum est, ipsum problema non satis esse determinatum, eique insuper vnā conditionem adiungi posse, quae etiam quantitas parametri seu quantitatis constantis  $c$ , quae in

aequatione pro curua inuenta  $x = \int \frac{y^{\frac{m}{m+1}} dy}{V(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}$  inest, de-

terminetur. Eiusmodi autem conditio duplex adiungi poterit, quarum altera ex amplitudine curuae non incongrue desumetur; aestimatur autem amplitudo curuae ex angulo, quem tangentes curuae in terminis praescriptis, per quos

curua transire debet, inuicem constituunt. Ex quo solutio inuenta huic problemati satisfacet, quo inter omnes curuas eiusdem amplitudinis per data duo puncta transeuntes, ea requiritur, quae habeat  $\int r^m ds$  maximum minimumne. Vel loco amplitudinis curuae in problemate proposito tertium quodpiam punctum praescribi potest, per quod curua quaesita simul transeat; hac enim conditione adiecta pariter quantitas indefinita  $c$  determinabitur. Problema igitur ita proponatur, vt inter omnes curuas per tria data puncta transeuntes ea definiatur, in qua esset  $\int r^m ds$  maximum vel minimum. Vtrotius autem modo problema proponatur, ex solutione vnica curua reperietur quae omnium maxime setisfaciet. Quemadmodum igitur, si in formula integrali, quae maxima minimaue esse debet, differentialia primi tantum gradus insunt, duo tantum puncta praescribere licet, per quae curua quaesita transeat, ita si formula illa integralis differentialia secundi gradus contineat, tria puncta, per quae curua quaesita ducatur, dari oportet. Ex quo colligitur si differentialia tertii ordinis in illam formulam ingrediantur, tum problema non fore determinatum, nisi quatuor puncta sint praescripta, per quae curua quaesita transeat, et ita porro. Quo altiora enim differentialia in aequationem quampiam ingrediuntur, eo latius ea patet, pluresque restrictiones admittit, propter plures integrationes, quarum singulae nouam constantem indefinitam inducunt. Atque ex his natura huiusmodi problematum quibus curuae maxima minimaue quadam proprietate gaudentes requiruntur, clarius perspicitur, quam ante solutionem actu transactam fieri potuisset.

§. 13. Haec autem attentius considerantibus planum fiet, numerum punctorum, quae ad curuam aequatione contentam determinandam requiruntur, pendere a gradu differentialium, quibus aequatio primitiua  $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}$  erit affecta, eliminatis quantitibus in subsidium vocatis,  $p, q, r$ , etc. ut tantum  $x$  et  $y$  cum suis differentialibus insint. Ita si haec aequatio statim fuerit algebraica, tum dato axe initioque abscissarum, ne unicum quidem punctum praescribi potest, per quod curua quaesita transeat, sed curua inuenta inter omnes omnino curuas ad eundem axem relatas nulla insuper conditione adiuncta, praescriptam proprietatem maximi minimiue habebit. Sic si  $\int (ay - xx)y dx$  maximum minimumue esse debeat, reperietur curua hac aequatione expressa  $2ay = xx$ , quae quaesito inter omnes omnino curuas ad eundem axem relatas maxime satisfacit. Aequatio autem generalis  $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \text{etc.}$  neque differentialis primi gradus vnquam fieri potest; neque tertii gradus differentialis, neque quinti, neque ullius gradus imparis. Quoties autem prodit aequatio differentialis secundi gradus, quod in omnibus fere problematis adhuc tractatis vsu venit, tum duo puncta pro lubitu assignari possunt, per quae curua quaesita transeat. His igitur casibus curua inuenitur, quae inter omnes alias per eadem duo puncta ductas praescripta maximi minimiue proprietate est praedita. Cum autem ad aequationem differentialem quarti ordinis peruenitur, tum curua inuenta quaeque habebit formulam  $\int Z dx$  maximam minimamue non inter omnes omnino curuas, sed inter omnes tantum, quae cum inuenta quatuor puncta habent communia. Simili modo aequatio differentialis sexti gradus

dus sex puncta data ad curuam determinandam requirer, et ita porro. Quod autem in nostro casu curuam tribus tantum punctis determinari dixi, cum tamen ea ex aequatione differentiali quarti gradus sit orta, inde venit, quod datum curuae punctum in vno datorum punctorum collocauerim: quae conditio non necessaria si omittatur, tum aequatio inuenta ad definitam curuam restringetur, si quatuor puncta, per quae transeat, praescribantur. Ita cyclois per quatuor data puncta descripta prae omnibus aliis curuis per eadem puncta transeuntibus hanc habebit praerogatiuam, vt in ea  $\int r ds$  minimum obtineat valorem.

§. 14. Missis autem his, quae ad generalem problematis Isoperimetrici indolem potius, quam ad meum institutum pertinet, ad alteram quaestionem soluendam progrediar, quae est ipsa a Cel. Bernoullio proposita. Quaeritur autem in ea curua, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis habeat  $\int r^m ds$  maximum minimumue. Hic igitur habentur duae formulae integrales  $\int ds$  et  $\int r^m ds$ , quarum vtrique valor ipsius  $V$  respondens est inuestigandus; quippe quo facto duo isti valores vel eorum multipli quique inuicem additi et  $= 0$  positi naturam curuae quaestitae exhibebunt. Adhibitis autem substitutionibus  $dy = p dx$ ;  $dp = q dx$ , formulae illae abibunt in has  $\int dx V(1 + pp)$  et  $\int \frac{(1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}} dx}{q^m}$ ; quarum illi respondet iste valor ipsius  $V$ ;  $\frac{-dp}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}} dx}$  pro altera autem erit vt ante  $V =$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} \text{ existente } P = \frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^m} \quad p \text{ et } Q = \frac{-m(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^{m+1}}.$$

Quamobrem pro curua quaesita orietur ista aequatio  $\frac{Adp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = dP - \frac{ddQ}{dx}$ ; quae integrata dat

$$\frac{Ap}{\sqrt{(1+pp)}} + B = P - \frac{dQ}{dx}. \text{ Multiplicetur vtrunque per } dp \text{ seu } qdx, \text{ et prodibit } \frac{Apdp}{\sqrt{(1+pp)}} + Bdp = Pdp - qdQ = Pdp + Qdq - Qdq - qdQ;$$

$$\text{quae denuo integrata dat } A\sqrt{(1+pp)} + Bp + C = Z - Qq; \text{ existente } Z = \frac{(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^m}.$$

Restituis igitur loco Z et Q suis valoribus, orietur haec

$$\text{aequatio } A\sqrt{(1+pp)} + Bp + C = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^m},$$

quae per  $dx$  multiplicata, eliminatis  $p$  et  $q$  abit in hanc  $A ds + B dy + C dx = (m+1)r^m ds$ ; in qua ut supra notavi, sine vlla restrictione vel B vel C nihilo aequale poni potest.

§. 15. Ponam igitur  $B=0$ , at primo quaeram aequationem inter  $r$  et  $s$ , ex hac aequatione  $A ds + C dx = (m+1)r^m ds$ . Ex superioribus autem patet esse  $\frac{dx}{ds} = \sinui \text{ arcus } \int \frac{ds}{r}$ , vnde loco  $dx$  suo substituto valore orietur  $A + C \sin. \text{ Arcus } \int \frac{ds}{r} = (m+1)r^m$ ,

vnde erit  $\int \frac{ds}{r} = \text{Arcui, cuius sinus est } \frac{(m+1)r^m - A}{C}$  seu

Tom. X,

Z

cuius

178 SOLVITIO PROBLEMATIS CVIVSDAM

cuius finis est  $\frac{r^m + a^m}{c^m}$ . Hinc ergo sumtis differentialibus

emerget haec aequatio  $\frac{ds}{r} = \frac{mr^{m-1}dr}{V(c^{2m} - (r^m + a^m)^2)}$ , ex hac

que porro ista  $s = m \int \frac{r^m dr}{V(c^{2m} - (r^m + a^m)^2)}$ . Casu igitur

quo inter omnes curvas eiusdem longitudinis per quatuor data puncta transeunt quæritur ea, in qua fit  $\int r ds$  minimum maximumue, habebitur pro curva quaesita ista aequatio

$s = \int \frac{r dr}{V(c^2 - r^2 + 2ar - aa)}$ , quae apprime convenit cum Bernoulliana. Cum communicata ista  $ds = \frac{2rdr}{V(c^2 - r^2 + 2ar - aa)}$ , est namque  $\frac{c^2}{4} = c^2 - a^2$  et  $n = \pm 2a$ .

§. 16. Constructio autem curvae quaesitae commodissime ex aequatione  $A V(1 + pp) + Bp + C = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$  deducetur, quae posito  $B=0$ , mu-

tatisque constantibus abit in hanc:  $q = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}{V(A V(1+pp) + C)}$ .

Multiplicetur per  $dx$ , et ob  $q dx = dp$  habebitur

$dx = \frac{dp V(A V(1+pp) + C)}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$  atque  $dy =$

$\frac{p dp V(A V(1+pp) + C)}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$ ; quae posterior aequatio

facto



facto  $\sqrt{(1 + pp)} = u$  transmutatur in istam  $dy = \frac{du \sqrt{(Au + C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$  tractatu faciliorem. Ex his autem

aequationibus curua per quadraturas facile conſtruitur. Aequatio vero differentialis primi gradus inter  $x$  et  $y$  ex istis aequationibus generalibus ob  $m$  numerum indefinitum formari nequit, at aequatio differentialis ſecundi gradus ob  $dp = \frac{ddy}{dx}$ ; et  $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{ds}{dx}$  obtinebitur iſta  $ds^{\frac{2m+1}{m}} = dx ddy \sqrt{(A ds + C dx)}$  ad curuam cognoscendam parum idonea. Interim tamen caſus eſt notandus, quo etiam fit  $C = 0$ ; tum enim aequatio  $A ds = (m + 1) r^m ds$  praebet  $r = \text{const.}$ , quae eſt proprietas circuli. Circulus igitur inter omnes alias curuas eiſdem longitudinis, et per eadem quatuor puncta ductas habebit  $\int r^m ds$  maximum minimumue.

§. 17. Conſiderabo autem praecipue caſum quo  $m = 1$ , in quo inter omnes curuas eiſdem longitudinis per quatuor data puncta tranſeuntes ea quaeritur, in qua fit  $\int r ds$  maximum minimumue. Iſto autem caſu

aequatio ſuperior  $dy = \frac{du \sqrt{(Au + C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$  abit in hanc

$dy = \frac{A du}{u^2} + \frac{C du}{u^3}$  cuius integralis eſt  $y = a + \frac{2b}{u} + \frac{c}{2u}$  constantibus mutatis; unde fit  $u^2 = \frac{2bu + c}{y - a}$  atque  $u = \sqrt{(1 + pp)} = \frac{b \pm \sqrt{(bb - ac + cy)}}{y - a}$ , ex qua elicitur  $p =$

180 SOLVT. PROBL. CVIVSD. A CEL. D. B. &c.

$$p = \frac{\sqrt{(2bb - ac - aa + 2ay + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb - ac + cy)})}}{y - a} = \frac{dy}{dx}.$$
 Fiat  $a = 0$ ; quia applicatam  $y$  augere licet quacunque constante, sine vlla restrictione, et habebitur  $dx = \frac{y dy}{\sqrt{(2bb + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb + cy)})}}$  pro aequatione qua curuae natura exprimitur. Signorum autem ambiguum  $\pm$  alterum dabit eam curuam, in qua  $\int r ds$  est maximum, alterum in qua minimum. Perspicuum autem est, si fiat  $b = 0$ , tum aequationem exhibituram esse cycloidem, quae iam ante est inuenta, et satisfacit sola, quando conditio aequalitatis curuarum omittitur.